Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2019/2020**
M1 Théorie de Galois **Maria Chlouveraki**

Extensions séparables, normales et galoisiennes - TD 6

1. Soit $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ un polynôme irréductible de degré n. Si a est une racine de $f(x)$, montrer que $\{a, a^p, a^{p^2}, \ldots, a^{p^{n-1}}\}$ est l'ensemble des racines de $f(x)$. En déduire que
(a) le corps de décomposition de $f(x)$ est $\mathbb{F}_p(a)$;
(b) $\mathbb{F}_p(a) \cong \mathbb{F}_{p^n}$;
(c) $\mathbb{F}_{p^n}$ est une extension normale de $\mathbb{F}_p$;
(d) $\mathbb{F}_{p^n}$ est une extension galoisienne de $\mathbb{F}_p$.

2. Nous avons déjà vu que $\mathbb{F}_4$ est le corps de décomposition du polynôme $x^4 - x \in \mathbb{F}_2[x]$. Trouver un polynôme irréductible dans $\mathbb{F}_2[x]$ dont le corps de décomposition est isomorphe à $\mathbb{F}_4$.

3. Montrer que :
(a) l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{3}i)/\mathbb{Q}$ est galoisienne.
(b) l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ n'est pas galoisienne.
(c) l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}i)/\mathbb{Q}$ est galoisienne.
(d) l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\sqrt{3}i)/\mathbb{Q}$ est galoisienne.

4. Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
(a) l'extension $\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p$ est galoisienne.
(b) l'extension $\mathbb{F}_p(x)/\mathbb{F}_p$ n'est pas galoisienne.

5. Donner l'exemple d'une extension (algébrique) qui :
(a) est séparable et normale.
(b) est séparable, mais pas normale.
(c) est normale, mais pas séparable.
(d) n'est ni normale ni séparable.